

Title	Zeno型観測による量子状態純化とエンタングルメント抽出：観測時間間隔の揺らぎに対する安定性(修士論文(2003年度))
Author(s)	鵜木, 誠
Citation	物性研究 (2004), 82(6): 956-977
Issue Date	2004-09-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/110025">http://hdl.handle.net/2433/110025</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 修士論文 (2003年度)

# Zeno 型観測による量子状態純化とエンタングルメント抽出 —観測時間間隔の揺らぎに対する安定性—

早稲田大学大学院 理工学研究科 大場研究室 鶴木誠<sup>\*1</sup>

## 目次

1 序論	956
1.1 量子状態の純化	956
1.2 Zeno 型観測による量子状態の純化	957
2 量子ビット系への適用	959
2.1 量子ビットの初期化	959
2.2 エンタングル状態の抽出	961
3 観測時間間隔 $\tau$ の揺らぎの影響	963
4 モデル計算	966
4.1 1 量子ビットの初期化	966
4.2 エンタングル状態の抽出	971
5 まとめと今後の展望	974
A $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$ の計算	975

## 1 序論

### 1.1 量子状態の純化

近年の、量子情報 (量子計算, 量子通信, 量子テレポーテーション, 量子暗号等) の分野における発展は, 理論・実験の両面において著しいものがある. これらを実現する際に大きな課題となっているのが, デコヒーレンスの問題である. 即ち, 量子情報や量子計算にはコヒーレンスの高い純粋状態を用いることが重要であるが, 環境との相互作用などにより, 時間が経つに従ってコヒーレンスが失われてしまうのである. そこで, デコヒーレンスを抑制したり, 失われたコヒーレンスを回復させる様々な方

---

<sup>\*1</sup> E-mail: m\_unoki@ruri.waseda.jp

法が提案されている [1, 2, 3]. 量子状態の純化は, 元々このように純粋状態のコヒーレンスが失われてしまった状況から, コヒーレンスを回復させる方法の一つとして提案された [2, 3].

一方で, そもそも初期状態としてコヒーレンスの高い純粋状態 (例えばエンタングル状態) をどのように準備するかということ (状態の初期化) も, 量子情報・計算の実現のために克服しなければならない課題である. この問題に対しても量子状態の純化は一つの解答になると考えられる.

本論文では, 最近中里らによって提案された方法 [4] に注目する. そして, この方法を量子情報の基本単位である量子ビットからなる系に適用し [5], 純化の効率を詳細に調べるとともに, 実際の実験において避けることのできないパラメータの揺らぎの影響を議論する.

## 1.2 Zeno 型観測による量子状態の純化

ここでは, [4, 5] の Zeno 型観測による量子状態純化の一般的な枠組みを簡単に紹介する. 図 1 のように, 二つの量子系 X と A からなる複合量子系を考える. そして, この複合系のうちの部分系 X のみに対して, それが状態  $|\phi\rangle_X$  にあることの確認を一定の時間間隔  $\tau$  で繰り返す. このような観測は, 量子系に対して一定の短い時間間隔で観測を繰り返すことにより, 量子系の時間発展を抑制する量子 Zeno 効果 [6, 7] の場合と似ているため, “Zeno 型観測” と呼んでいる. 全体系のハミルトニアンを  $H$ , 初期状態を

$$\rho_0 = |\phi\rangle_X \langle\phi| \otimes \rho_A \quad (1)$$

とし, 系 X のみに対する上記の観測を射影演算子

$$\mathcal{O} = |\phi\rangle_X \langle\phi| \otimes \mathbf{1}_A \quad (2)$$

で表すと,  $N$  回観測を行って, 全ての回において系 X が状態  $|\phi\rangle_X$  にあることが見出される確率  $P^{(\tau)}(N)$  は,

$$\begin{aligned} P^{(\tau)}(N) &\equiv \text{Tr}[(\mathcal{O} e^{-iH\tau} \mathcal{O})^N \rho_0 (\mathcal{O} e^{iH\tau} \mathcal{O})^N] \\ &= \text{Tr}_A[(V_\phi(\tau))^N \rho_A (V_\phi^\dagger(\tau))^N] \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる. ここで,  $V_\phi(\tau) \equiv {}_X\langle\phi|e^{-iH\tau}|\phi\rangle_X$  は, 系 A に作用する演算子である. また, 初期状態  $\rho_0$  は一般に (1) のようには表せないが, 最初に系 X が  $|\phi\rangle_X$  にあることの確認を行い, それが確認された場合には (1) となるため, これを改めて初期状態  $\rho_0$  と取り直すことにする.

また, このとき全体系と系 A の状態は, それぞれ,

$$\rho_{\text{tot}}^{(\tau)}(N) = (\mathcal{O} e^{-iH\tau} \mathcal{O})^N \rho_0 (\mathcal{O} e^{iH\tau} \mathcal{O})^N / P^{(\tau)}(N), \quad (4)$$

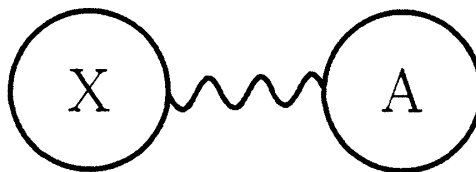


図 1: Zeno 型観測による量子状態純化の状況設定. 系 X に対して観測を繰り返すことにより, 系 A の状態を純化する.

$$\rho_A^{(\tau)}(N) = \text{Tr}_X \rho_{\text{tot}}^{(\tau)}(N) = (V_\phi(\tau))^N \rho_A (V_\phi^\dagger(\tau))^N / P^{(\tau)}(N) \quad (5)$$

となる。

次に、系 A の状態の時間発展 (5) を調べるために、 $V_\phi(\tau)$  の固有値問題を考える。 $V_\phi(\tau)$  はユニタリ演算子ではないため、一般に右と左の固有値問題を考えなければならない。即ち、

$$\begin{cases} V_\phi(\tau) |u_n\rangle_A = \lambda_n |u_n\rangle_A, \\ {}_A\langle v_n| V_\phi(\tau) = \lambda_n {}_A\langle v_n| \end{cases} \quad (6)$$

を解くことになる。そして、これらの右 (左) 固有ベクトル  $|u_n\rangle_A$  ( ${}_A\langle v_n|$ ) が次のような完全正規直交系を成しているものとする：

$$\sum_n |u_n\rangle_A {}_A\langle v_n| = \mathbb{1}_A, \quad {}_A\langle v_n| u_m\rangle_A = \delta_{nm}. \quad (7)$$

このとき、 $V_\phi(\tau)$  はこれらの固有ベクトルを用いて次のように展開できる：

$$V_\phi(\tau) = \sum_n \lambda_n |u_n\rangle_A {}_A\langle v_n|. \quad (8)$$

ここで、 $e^{-iH\tau}$  のユニタリ性から、固有値  $\lambda_n$  は  $0 \leq |\lambda_n| \leq 1$  を満たす [5]。したがって、 $(V_\phi(\tau))^N$  は  $N$  が大きくなるにつれ、絶対値が最大の固有値  $\lambda_0$  に関する項のみが寄与することになる：

$$(V_\phi(\tau))^N = \sum_n \lambda_n^N |u_n\rangle_A {}_A\langle v_n| \xrightarrow{N \rightarrow \text{large}} \lambda_0^N |u_0\rangle_A {}_A\langle v_0|. \quad (9)$$

ただし、このように残る項が一つだけとなるためには、 $\lambda_0$  が一意的で離散的、かつ縮退していないことが必要である。

この式を系 A の状態 (5) に代入すると、

$$\rho_A^{(\tau)}(N) = \sum_{n,m} (\lambda_n \lambda_m^*)^N |u_n\rangle_A {}_A\langle v_n| \rho_0 |v_m\rangle_A {}_A\langle u_m| / P^{(\tau)}(N) \xrightarrow{N \rightarrow \text{large}} \frac{|u_0\rangle_A {}_A\langle u_0|}{{}_A\langle u_0| u_0\rangle_A} \quad (10)$$

となる。つまり、系 A は純粋状態  $|u_0\rangle_A$  に純化されるのである。ここで、 $|u_0\rangle_A$  は、系 A の初期状態  $\rho_A$  には依存せず、観測する状態  $|\phi\rangle_X$ 、観測の時間間隔  $\tau$ 、及び、ハミルトニアン  $H$  のみによって決まる。したがって、 $|\phi\rangle_X$ 、 $\tau$ 、及び  $H$  に含まれるパラメータを調節することにより、系 A を初期状態に関わらず、(任意ではないがある範囲において) 望みの状態に純化することができる。また、以下では簡単のため、 ${}_A\langle u_0| u_0\rangle_A = 1$  と規格化されているものとする。これが Zeno 型観測による量子状態の純化 [4, 5] である。

この方法で純化が成功する確率は、系 X に対する全ての状態確認において  $|\phi\rangle_X$  が見出される確率  $P^{(\tau)}(N)$  であるが、それは観測回数  $N$  が大きくなると、

$$P^{(\tau)}(N) = \sum_{n,m} (\lambda_n \lambda_m^*)^N \text{Tr}_A [|u_n\rangle_A {}_A\langle v_n| \rho_A |v_m\rangle_A {}_A\langle u_m|] \xrightarrow{N \rightarrow \text{large}} |\lambda_0|^{2N} {}_A\langle v_0| \rho_A |v_0\rangle_A \quad (11)$$

のように振舞う。したがって、最大固有値が  $|\lambda_0| = 1$  となるように観測の時間間隔  $\tau$  や、観測を行う状態  $|\phi\rangle_X$  等のパラメータを調節することができれば、純化の成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  の減少を抑えることができる。

一方、この純化の方法の効率を測るもう一つの目安として、得られた状態が欲しい状態  $|u_0\rangle_A$  にどれだけ近づいているかを表す“フィデリティ”  $F^{(\tau)}(N) \equiv {}_A\langle u_0 | \rho_A^{(\tau)}(N) | u_0 \rangle_A$  を考える。これは、観測回数  $N$  が大きいところで、

$$F^{(\tau)}(N) \xrightarrow{N \rightarrow \text{large}} 1 + O(|\lambda_1/\lambda_0|^{2N}) \quad (12)$$

のように 1 に近づく。ここで、 $\lambda_1$  は  $V_\phi(\tau)$  の絶対値が二番目に大きい固有値である。よって、

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right| \ll 1 \quad (13)$$

となるパラメータを選ぶことで、より少ない観測回数で純化が達成できる。

この純化の方法の特徴としては、まず、手続きが簡単であることが挙げられる。即ち、一つの量子系に対して、同一の状態確認を繰り返すだけで、コヒーレンスの高い純粋状態が得られるのである。これに対して他の方法では、複数の操作や観測を行うことが必要となる [2, 3]。第二に、この方法では射影的観測が重要な役割を果たす。第三に、この方法は非常に一般的な枠組みで成り立つものであり、様々な量子系に応用できる可能性がある。

本論文では、特に量子情報・量子計算への応用に焦点を当て、量子情報の基本単位である量子ビットからなる系をモデルとして取り上げる。本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 節では、この方法を量子ビット系に適用することで量子ビットの初期化や、エンタングル状態の抽出が可能であることを示す [5]。次に、第 3 節と第 4 節において、望みの純粋状態を効率よく抽出するために調節すべきパラメータが、理想的な状況から揺らいでしまった場合の安定性を議論する。特に、観測時間間隔  $\tau$  が揺らいでしまっても純化が可能であるか、また可能ならば効率はどのような影響を受けるのかを議論する。第 3 節ではその解析の方法を述べ、第 4 節で具体的なモデルを与えて議論する。第 5 節ではまとめと今後の展望を述べる。

## 2 量子ビット系への適用

この節では、第 1 節で説明した Zeno 型観測による量子状態純化の方法 [4] を量子ビット系に適用し、量子ビットの初期化や、エンタングル状態の抽出が可能であることを示す [5]。

### 2.1 量子ビットの初期化

まず、量子ビットの初期化について議論する。これは、図 2 のように量子ビットの列  $\{X, 1, \dots, n\}$  を考え、その一番端にある量子ビット  $X$  が状態  $|\uparrow\rangle_X$  にあることの確認を繰り返すことにより、残りの量子ビットを  $|\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle_{12\dots n}$  に“初期化”するというものである。ここで、 $|\uparrow\rangle_X$  は  $\sigma_z^X$  の固有値 1 に属する固有ベクトル、 $|\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle_{12\dots n} \equiv |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_n$  であり、 $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) は Pauli 行列である。系のハミルトニアン  $H$  は、

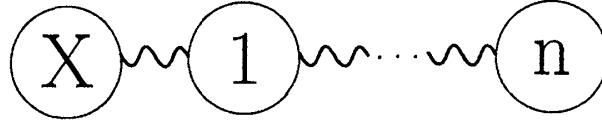


図 2: 量子状態の初期化の状況設定. 量子ビット  $X$  が  $|\uparrow\rangle_X$  にあることの観測を繰り返すことで, 残りの量子ビットを  $|\uparrow\rangle$  に揃える.

$$H = g_1 \sigma^X \cdot \sigma^1 + g_2 \sigma^1 \cdot \sigma^2 + \cdots + g_n \sigma^{n-1} \cdot \sigma^n \quad (14)$$

で与えられるものとする. ただし,  $g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は相互作用の結合定数であり,  $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  である.

このハミルトニアンは,  $|\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle_{X12\dots n}$  を固有状態として持つことが容易に分かる. このことから, 初期状態を

$$\rho_0 = |\uparrow\rangle_X \langle\uparrow| \otimes \rho_{12\dots n} \quad (15)$$

とし, 系  $X$  が状態  $|\uparrow\rangle_X$  にあることの確認を射影演算子

$$\mathcal{O} = |\uparrow\rangle_X \langle\uparrow| \otimes \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_n \quad (16)$$

で表すと, 観測の効果の入った, 系  $12\dots n$  の時間発展演算子  $V_\uparrow(\tau)$  は,

$$\begin{aligned} V_\uparrow(\tau) &\equiv {}_X \langle\uparrow| e^{-iH\tau} |\uparrow\rangle_X \\ &= e^{-ig\tau} |\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle_{12\dots n} \langle\uparrow\uparrow\cdots\uparrow| + \{\text{他の項}\} \end{aligned} \quad (17)$$

となる. ただし, 簡単のため  $g = g_1 = \cdots = g_n$  とした.  $|\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle_{12\dots n}$  は  $V_\uparrow(\tau)$  の固有ベクトルであり, それに対応する固有値  $\lambda_{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow} = e^{-ig\tau}$  は  $|\lambda_{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}| = 1$  を満たしている. よって, 他の全ての固有値が  $|\lambda_k| < 1$  ( $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ ) となるように観測の時間間隔  $\tau$ ,  $g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を選ぶことができれば, 有限の成功確率  $P^{(\tau)}(N) = {}_{12\dots n} \langle\uparrow\cdots\uparrow| \rho_{12\dots n} |\uparrow\cdots\uparrow\rangle_{12\dots n}$  で全ての量子ビットを  $|\uparrow\rangle$  に揃えることができる.

実際に  $n = 1, 2$  の場合には,  $|\lambda_k| < 1$  ( $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ ) を実現する時間間隔  $\tau$  が存在することが分かっている [5]. 例えば, 1 量子ビットの場合には, ハミルトニアン  $H$  と初期状態  $\rho_0$  を

$$H = g \sigma^X \cdot \sigma^1, \quad (18)$$

$$\rho_0 = |\uparrow\rangle_X \langle\uparrow| \otimes \rho_1 \quad (19)$$

とし, 系  $X$  に対する観測  $\mathcal{O}$  を

$$\mathcal{O} = |\uparrow\rangle_X \langle\uparrow| \otimes \mathbb{1}_1 \quad (20)$$

で表すと,  $V_\uparrow(\tau)$  は,

$$\begin{aligned} V_\uparrow(\tau) &\equiv {}_X \langle\uparrow| e^{-iH\tau} |\uparrow\rangle_X \\ &= e^{-ig\tau} |\uparrow\rangle_1 \langle\uparrow| + e^{ig\tau} \cos 2g\tau |\downarrow\rangle_1 \langle\downarrow| \end{aligned} \quad (21)$$

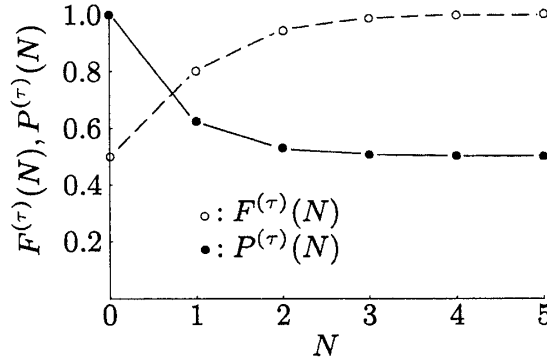


図 3: 2 量子ビットの初期化の成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  とフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$ . パラメータは  $g = g_1 = g_2$ ,  $g\tau/\sqrt{2} \approx 1.23$ ,  $\rho_{12} = (|\uparrow\uparrow\rangle_{12}\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle_{12}\langle\downarrow\downarrow|)/2$ .

となる.  $V_1(\tau)$  の固有ベクトルは,  $|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1$  であり, それらが属する固有値は,  $\lambda_\uparrow = e^{-ig\tau}$ ,  $\lambda_\downarrow = e^{ig\tau} \cos 2g\tau$  である.  $\tau$  によらず  $|\lambda_\uparrow| = 1$  となっている. よって,  $2g\tau \neq m\pi$  ( $m$ : 整数) となるように  $\tau$  を選ぶことで,  $|\lambda_\downarrow| < |\lambda_\uparrow|$  となり, 系 1 を  $|\uparrow\rangle_1$  に初期化することができる. その成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  とフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$  は,

$$P^{(\tau)}(N) = {}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1 + |\cos 2g\tau|^{2N} {}_1\langle\downarrow|\rho_1|\downarrow\rangle_1, \quad (22)$$

$$F^{(\tau)}(N) = \frac{{}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1}{{}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1 + |\cos 2g\tau|^{2N} {}_1\langle\downarrow|\rho_1|\downarrow\rangle_1} \quad (23)$$

である. また, 2 量子ビットの場合には,  $\sqrt{2}g\tau \neq m\pi$  ( $m$ : 整数) となるように  $\tau$  を選ぶことにより,  $|\uparrow\uparrow\rangle_{12}$  に初期化できることが分かっている (簡単のため  $g = g_1 = g_2$  とした). 図 3 は, 2 量子ビットの場合に, 成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  とフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$  を観測回数  $N$  の関数として描いたものである. ただし, パラメータは  $g = g_1 = g_2$ ,  $g\tau/\sqrt{2} \approx 1.23$ ,  $\rho_{12} = (|\uparrow\uparrow\rangle_{12}\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle_{12}\langle\downarrow\downarrow|)/2$  としている.  $g\tau$  は, 最も少ない観測回数で純化できるように選んでいる. 実際, このように選ぶことで, わずか 4, 5 回の観測でフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$  がほぼ 1 になっていることが分かる. また,  $|\lambda_{\uparrow\uparrow}| = 1$  であるため, 成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  は有限の値  $1/2$  に保たれている.

## 2.2 エンタングル状態の抽出

次に, エンタングル状態を抽出することを考える. エンタングル状態は, 量子情報・計算のアルゴリズムにおいて重要な役割を果たすものであり, この状態を準備することは量子情報・計算の実現のために大切である. エンタングル状態の抽出のためには, 図 4 のように三つの量子ビット  $X, A, B$  からなる系を考え, 量子ビット  $X$  に対して状態確認を繰り返す. 系のハミルトニアンは

$$H = \frac{\omega}{2}(\mathbb{1}_X + \sigma_z^X) + \frac{\omega}{2}(\mathbb{1}_A + \sigma_z^A) + \frac{\omega}{2}(\mathbb{1}_B + \sigma_z^B) + g(\sigma_+^X \sigma_-^A + \sigma_-^X \sigma_+^A) + g(\sigma_+^X \sigma_-^B + \sigma_-^X \sigma_+^B) \quad (24)$$

で与えられるものとする.

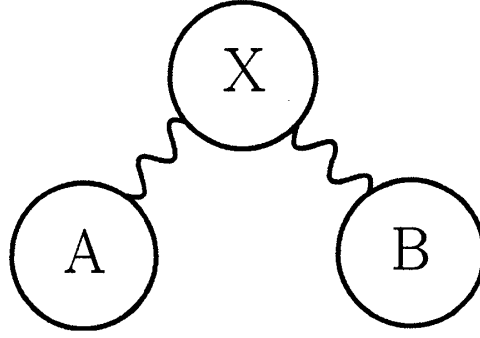


図 4: エンタングル状態抽出の状況設定. 量子ビット X に対して観測を繰り返すことで, 量子ビット A と B にエンタングル状態を抽出する.

初期状態を

$$\rho_0 = |\phi\rangle_X \langle\phi| \otimes \rho_{AB}, \quad (25)$$

とし, 系 X に対する観測を

$$\mathcal{O} = |\phi\rangle_X \langle\phi| \otimes \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B \quad (26)$$

で表すと, 系 AB に作用する, 観測の影響を受けた演算子  $V_\phi(\tau)$  は,

$$\begin{aligned} V_\phi(\tau) &\equiv {}_X \langle\phi| e^{-iH\tau} |\phi\rangle_X \\ &= e^{-i\omega\tau} \left( 1 - (1 - e^{-i\omega\tau}) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) |\Psi^-\rangle_{AB} \langle\Psi^-| \\ &\quad + \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-i\omega\tau} \cos \sqrt{2}g\tau \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} \langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad + e^{-i3\omega\tau} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{i\omega\tau} \cos \sqrt{2}g\tau \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) |\uparrow\uparrow\rangle_{AB} \langle\uparrow\uparrow| \\ &\quad + e^{-i\omega\tau} \cos \sqrt{2}g\tau \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-i\omega\tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) |\Psi^+\rangle_{AB} \langle\Psi^+| \\ &\quad - \frac{i}{2} e^{-i\omega\tau} \sin \sqrt{2}g\tau \sin \theta (e^{i\varphi} |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} \langle\Psi^+| + e^{-i\varphi} |\Psi^+\rangle_{AB} \langle\downarrow\downarrow|) \\ &\quad - \frac{i}{2} e^{-i2\omega\tau} \sin \sqrt{2}g\tau \sin \theta (e^{-i\varphi} |\uparrow\uparrow\rangle_{AB} \langle\Psi^+| + e^{i\varphi} |\Psi^+\rangle_{AB} \langle\uparrow\uparrow|) \end{aligned} \quad (27)$$

となる. ただし, 観測する状態  $|\phi\rangle_X$  を

$$|\phi\rangle_X = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle_X + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle_X \quad (28)$$

と表した. また,

$$|\Psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle_{AB} \pm |\downarrow\uparrow\rangle_{AB}), \quad |\Phi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle_{AB} \pm |\downarrow\downarrow\rangle_{AB}) \quad (29)$$

は, Bell 状態と呼ばれる状態で, それぞれ 2 量子ビット系における最もエンタングルした状態である. 式 (27) より, その一つ  $|\Psi^-\rangle_{AB}$  が  $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルとなっていることが分かる. これは, ハミルトニアン (24) が系 A と系 B に関して対称であるため, 一重項の部分と三重項からなる部分に分離す



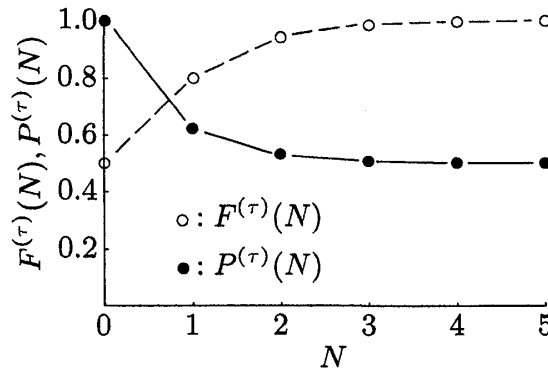


図 5: エンタングル状態  $|\Psi^-\rangle_{AB}$  の抽出の成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  とフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$ . パラメータは  $\omega\tau = 2\pi$ ,  $g\tau/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3) \approx 1.23$ ,  $\rho_{AB} = (|\Psi^-\rangle_{AB}\langle\Psi^-| + |\Psi^+\rangle_{AB}\langle\Psi^+|)/2$ .

ることによるものである. したがって, この  $|\Psi^-\rangle_{AB}$  が属する固有値

$$\lambda_{\Psi^-} = e^{-i\omega\tau} \left( 1 - (1 - e^{-i\omega\tau}) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (30)$$

が最大固有値となるように  $\omega, g, \tau, \theta, \varphi$  のパラメータを選ぶことにより, エンタングル状態  $|\Psi^-\rangle_{AB}$  を抽出することができる. 特に,  $|\lambda_{\Psi^-}| = 1$  となる場合には, 観測回数  $N$  を増やしても有限の成功確率で純化できる. そのための条件は,

$$e^{-i\omega\tau} = 1 \iff \omega\tau = 2m\pi, \quad m: \text{整数} \quad (31)$$

である  $[\theta = (2n+1)\pi]$  の場合にも  $|\lambda_{\Psi^-}| = 1$  となるが, 他の固有値に大きさが 1 となるものがあるため, 純化できなくなってしまう].

図 5 は, 実際にこの条件を満たすようにパラメータを選んで, 成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  とフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$  を描いたものである. パラメータは,  $\omega\tau = 2\pi$ ,  $g\tau/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3) \approx 1.23$ ,  $\rho_{AB} = (|\Psi^-\rangle_{AB}\langle\Psi^-| + |\Psi^+\rangle_{AB}\langle\Psi^+|)/2$  とした.  $g\tau$  は, 最も少ない回数で純化を達成できるように選んでいる. この場合も, 4, 5 回の観測でフィデリティ  $F^{(\tau)}(N)$  はほぼ 1 になり, また時間間隔  $\tau$  を式 (31) を満たすように選んだため, 成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  は有限の値  $1/2$  に保たれている.

### 3 観測時間間隔 $\tau$ の揺らぎの影響

ここで議論している Zeno 型観測による量子状態純化の方法では, 効率良く純化を行うために様々なパラメータを特定の値に調節する必要がある. 例えば, 第 2 節で紹介したように, エンタングル状態を抽出する場合には, 観測の時間間隔  $\tau$  を適切に選ばなければ, 観測を繰り返すに従って成功確率  $P^{(\tau)}(N)$  が指数関数的に減衰してしまう.

しかし, 現実の実験においては, 時間間隔  $\tau$  を毎回一定に保つことは困難である場合もあるものと考えられる. そこで本論文では, この方法の, 時間間隔  $\tau$  の揺らぎに対する安定性を議論する. 具体的には, 揺らぎが入った場合にも, この方法による状態純化が可能であるか, また可能ならば, 効率に対する影響はどの程度かを議論する.

この節では、まず、第一節で説明した Zeno 型観測による量子状態純化の一般的な枠組みに、観測時間間隔  $\tau$  の揺らぎの効果を取り入れる。続いて、その影響の評価方法を述べ、次節で具体的なモデルで考察する。

初めに、一回目の観測を考える。時間  $\tau_1$  だけ時間発展した後に系 X に対する観測を行った場合、状態  $|\phi\rangle_X$  が見出される確率  $P^{(\tau_1)}(1)$  と、得られる状態  $\rho_A^{(\tau_1)}(1)$  は、

$$P^{(\tau_1)}(1) = \text{Tr}_A[V_\phi(\tau_1)\rho_A V_\phi^\dagger(\tau_1)], \quad (32)$$

$$\rho_A^{(\tau_1)}(1) = V_\phi(\tau_1)\rho_A V_\phi^\dagger(\tau_1)/P^{(\tau_1)}(1) \quad (33)$$

である。ここで、次式で定義される超演算子  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  を導入する：

$$\hat{v}_\phi^{(\tau)}\rho_A \equiv V_\phi(\tau)\rho_A V_\phi^\dagger(\tau). \quad (34)$$

この  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  を用いると、 $P^{(\tau_1)}(1)$  と  $\rho_A^{(\tau_1)}(1)$  は、

$$P^{(\tau_1)}(1) = \text{Tr}_A[\hat{v}_\phi^{(\tau_1)}\rho_A], \quad (35)$$

$$\rho_A^{(\tau_1)}(1) = \hat{v}_\phi^{(\tau_1)}\rho_A/P^{(\tau_1)}(1) \quad (36)$$

と書き直せる。そして、 $\tau$  が揺らいだ場合に得られる状態として、式 (36) の揺らぎに関するアンサンブル平均を取ったものを考える。 $\tau_1$  が分布関数  $f(\tau_1)$  にしたがって現れるものとする、平均の成功確率は

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(\tau_0, \Delta\tau, \dots)}(1) &\equiv \langle P^{(\tau_1)}(1) \rangle \\ &\equiv \int_0^\infty d\tau_1 f(\tau_1) P^{(\tau_1)}(1) \\ &= \int_0^\infty d\tau_1 f(\tau_1) \text{Tr}_A[\hat{v}_\phi^{(\tau_1)}\rho_A] \\ &= \text{Tr}_A \left[ \int_0^\infty d\tau_1 f(\tau_1) \hat{v}_\phi^{(\tau_1)}\rho_A \right] \\ &= \text{Tr}_A[\langle \hat{v}_\phi^{(\tau_1)} \rangle \rho_A] \end{aligned} \quad (37)$$

となる。ただし、 $(\tau_0, \Delta\tau, \dots)$  は時間間隔  $\tau$  の分布  $f(\tau)$  を特徴付ける量である。以下では簡単のため、 $f(\tau)$  は平均値  $\tau_0$  と揺らぎ幅  $\Delta\tau$  のみによって特徴付けられるものとする。

一方で、状態については、系 X に対する観測で状態  $|\phi\rangle_X$  が見出される場合のみを抽出するため、 $\tau_1$  の分布として  $f(\tau_1)$  をそのまま用いることはできない。 $\tau_1$  の値によって成功確率が異なるため、その重みを考慮に入れなければならないからである。つまり、状態  $|\phi\rangle_X$  が見出される事象の中で、時間間隔が  $\tau_1$  であるという条件付き確率を考える必要がある。その分布は、

$$\begin{aligned} \bar{f}(\tau_1) d\tau_1 &= \frac{f(\tau_1)P^{(\tau_1)}(1)}{\int_0^\infty d\tau f(\tau)P^{(\tau)}(1)} d\tau_1 \\ &= \frac{f(\tau_1)P^{(\tau_1)}(1)}{\bar{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(1)} d\tau_1 \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられる。したがって、一回目の観測で得られる状態は、

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_A^{(\tau_0, \Delta\tau)}(1) &\equiv \langle\langle \rho_A^{(\tau_1)}(1) \rangle\rangle \\
 &\equiv \int_0^\infty d\tau_1 \bar{f}(\tau_1) \rho_A^{(\tau_1)}(1) \\
 &= \int_0^\infty d\tau_1 \frac{f(\tau_1) P(\tau_1)(1)}{\tilde{P}(\tau_0, \Delta\tau)(1)} \frac{\hat{v}_\phi^{(\tau_1)} \rho_A}{P(\tau_1)(1)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty d\tau_1 f(\tau_1) \hat{v}_\phi^{(\tau_1)} \rho_A}{\tilde{P}(\tau_0, \Delta\tau)(1)} \\
 &= \frac{\langle \hat{v}_\phi^{(\tau_1)} \rangle \rho_A}{\tilde{P}(\tau_0, \Delta\tau)(1)} \tag{39}
 \end{aligned}$$

となる。

同様に、 $N$  回観測を繰り返した場合には、成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  については一連の時間間隔  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  の揺らぎに関するアンサンブル平均をとり

$$\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) = \text{Tr}_A[\langle \hat{v}_\phi^{(\tau_N)} \dots \hat{v}_\phi^{(\tau_1)} \rangle \rho_A], \tag{40}$$

状態  $\tilde{\rho}_A^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  については、全ての観測で状態  $|\phi\rangle_X$  が見出される事象の中で、時間間隔が  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  であるという条件付き確率を考えることで

$$\tilde{\rho}_A^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) = \frac{\langle \hat{v}_\phi^{(\tau_N)} \dots \hat{v}_\phi^{(\tau_1)} \rangle \rho_A}{\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)} \tag{41}$$

を得る。

ここでさらに、時間間隔  $\tau_i$  の出現は Markov 的であり、毎回同一の分布  $f(\tau_i)$  に従うものと仮定すると、

$$\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) = \text{Tr}_A[\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle^N \rho_A], \tag{42}$$

$$\tilde{\rho}_A^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) = \langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle^N \rho_A / \tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) \tag{43}$$

のように、 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  を用いて簡単に書くことができ、超演算子  $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  を計算することに帰着される。

そこで、 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  の固有値問題を考える。通常の Zeno 型観測による量子状態純化の場合と同様の議論によって、観測回数  $N$  を増やすとともに  $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  の最大固有値に属する状態が抽出されることが分かる。そのための条件は、最大固有値が一意的で離散的、かつ縮退していないことである。ここで注意すべきことは、 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  が超演算子であるため、抽出される状態は必ずしも純粋状態にはならないということである。したがって、時間間隔  $\tau$  に揺らぎがあるときに純化可能である条件は、 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  の最大固有値が上記の条件を満たしており、さらに、その最大固有値に属する状態が純粋状態となっていることである。一般に、 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  の固有値問題を解析的に解くことは困難であるが、例外的に簡単に解ける場合がある。それは  $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルが時間間隔  $\tau$  に依存しない場合である。この場合には、 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  を、 $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルを用いて簡単に対角化することができる。次節では、具体的なモデルを与えて揺らぎの影響を調べる。その際、 $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルが時間間隔  $\tau$  に依存しない場合には、成功確率やフィデリティへの揺らぎの影響を解析的に計算し、固有ベクトルが  $\tau$  に依存する場合には、数値的な計算により揺らぎの影響を議論する。

## 4 モデル計算

この節では、具体的な系として第2節で取り上げた量子ビットの初期化とエンタングル状態抽出の場合を考える。そして、揺らぎが入ってしまったときの純化可能性を調べるとともに、揺らぎの具体的な分布を与えてその影響を評価する。

揺らぎの分布  $f(\tau)$  としては、次に挙げる三種類を考える。初めの二つは、平均値  $\tau_0$  の周りで幅  $\Delta\tau$  で揺らいでしまうという場合として、Gauss 型

$$f(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta\tau)^2}} e^{-(\tau-\tau_0)^2/2(\Delta\tau)^2} d\tau \quad (44)$$

と Lorentz 型

$$f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\tau}{(\tau - \tau_0)^2 + (\Delta\tau/2)^2} d\tau \quad (45)$$

の分布を採用する。これらの分布は、平均値  $\tau_0$  と揺らぎ幅  $\Delta\tau$  のみによって特徴付けられる。ただし、 $\Delta\tau$  は Gauss 型の場合は分散、Lorentz 型の場合は半値幅である。また、この場合  $\tau$  の取り得る範囲は  $(-\infty, \infty)$  として計算するが、 $\tau_0$  に比べて  $\Delta\tau$  が十分小さければ、 $\tau$  が負になってしまう部分からの寄与は無視できると考えられる。揺らぎの分布の三つ目は、毎回一定の時間間隔  $\tau$  で観測しようとするのではなく、平均時間間隔は  $\tau_0$  で、ランダムに観測する場合 (Poisson 過程) である。この場合、 $\tau$  の分布は指数分布で与えられる：

$$f(\tau) d\tau = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau. \quad (46)$$

この分布は、平均値  $\tau_0$  のみによって特徴付けられる。例えば、分散  $\Delta\tau = \tau_0$  である。また、この分布の場合には、 $\tau$  の取り得る範囲は  $[0, \infty)$  として計算する。

### 4.1 1 量子ビットの初期化

まず、1 量子ビットの初期化の場合を考える。 $V_\uparrow(\tau)$  は式 (21) で与えられており、その固有ベクトル  $|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1$  は時間間隔  $\tau$  には依存しない。このとき超演算子  $\langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle$  は、 $|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1$  を基底として  $V_\uparrow(\tau)$  を展開することにより、

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle_{mn,ij} &\equiv \langle {}_1\langle m| V_\uparrow(\tau) |i\rangle_1 \langle j| V_\uparrow^\dagger(\tau) |n\rangle_1 \rangle \\ &= \langle \lambda_m \lambda_n^* \rangle \delta_{mi} \delta_{nj}, \quad (i, j, m, n = \uparrow, \downarrow) \end{aligned} \quad (47)$$

と対角化できる。ここで、 $\lambda_\uparrow = e^{-i2g\tau}$ 、 $\lambda_\downarrow = \cos 2g\tau$  はそれぞれ  $|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1$  が属する固有値である。これを行列表示すれば、

$$\langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle e^{-i2g\tau} \cos 2g\tau \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle e^{i2g\tau} \cos 2g\tau \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \cos^2 2g\tau \rangle \end{pmatrix}. \quad (48)$$

ただし, 基底は密度行列  $\rho_1$  を

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} (\rho_1)_{\uparrow\uparrow} & (\rho_1)_{\uparrow\downarrow} \\ (\rho_1)_{\downarrow\uparrow} & (\rho_1)_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (\rho_1)_{\uparrow\uparrow} \\ (\rho_1)_{\uparrow\downarrow} \\ (\rho_1)_{\downarrow\uparrow} \\ (\rho_1)_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (49)$$

とベクトル形式で表すように取った. 即ち,

$$|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\uparrow\rangle_A \langle\downarrow| \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle_A \langle\uparrow| \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow| \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

とした. ここで,  $(\rho_1)_{ij} \equiv {}_1\langle i|\rho_1|j\rangle_1$  ( $i, j = \uparrow, \downarrow$ ) である.

式 (48) より,  $\langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle_{\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow}$  は揺らぎの種類とは無関係に 1 であることが分かる. これは,  $(\rho_1)_{\uparrow\uparrow} \equiv {}_1\langle \uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1$  が何回観測を行っても減少しないことを意味している. したがって,  $\tau$  に揺らぎが入ってしまった場合にも, 系 1 は有限の成功確率  $\bar{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) = {}_1\langle \uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1$  で  $|\uparrow\rangle_1$  に純化できる.

この結果は,  $|\uparrow\uparrow\rangle_{X1}$  がハミルトニアン固有状態となっているため, 時間間隔  $\tau$  によらず  $|\lambda_{\uparrow\uparrow}| = 1$  が成り立つことによるものである. これは, ハミルトニアンが式 (14) の形であれば, 初期化する量子ビットの数にはよらない性質である. したがって, 時間間隔  $\tau$  が揺らいでしまっても, 任意の数の量子ビットを有限の成功確率で  $|\uparrow\rangle$  に初期化できる.

一方で, 多量子ビットの初期化の場合には,  $V_\uparrow(\tau)$  の固有ベクトルに  $\tau$  依存性が現れるために, その固有ベクトルを用いて  $\langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle$  を対角化することができなくなってしまう. そこで本論文では, 具体的な揺らぎの分布を与えて揺らぎの効率への影響を評価することは, 初期化の場合には 1 量子ビットについてのみに行うことにする. また, 次小節においてエンタングル状態抽出の場合を考えるが, これは  $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルが  $\tau$  に依存する場合の例となっており, そのときの揺らぎの影響は数値的な計算によって評価する.

#### 4.1.1 Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎの場合

次に, 具体的に揺らぎの分布を与えて効率への影響を評価する. そのために, 具体的に  $\langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle$  の各成分を計算すると, Gauss 型の揺らぎの場合には,

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle_{\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow} &= \langle |\lambda_\uparrow|^2 \rangle = 1, \\ \langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle_{\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow} &= \langle \lambda_\uparrow \lambda_\downarrow^* \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-8(g\Delta\tau)^2} e^{-i4g\tau_0} \right), \\ \langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle_{\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow} &= \langle \lambda_\downarrow \lambda_\uparrow^* \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-8(g\Delta\tau)^2} e^{i4g\tau_0} \right), \\ \langle \hat{v}_\uparrow^{(\tau)} \rangle_{\downarrow\downarrow, \downarrow\downarrow} &= \langle |\lambda_\downarrow|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-8(g\Delta\tau)^2} \cos 4g\tau_0 \right) \end{aligned} \quad (51)$$

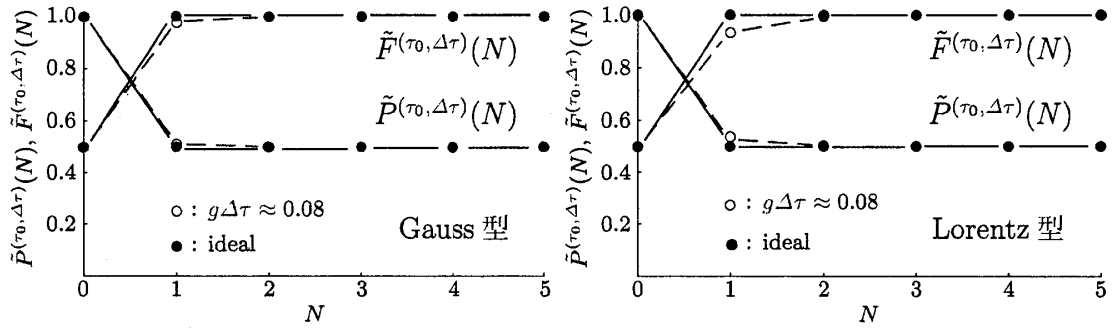


図 6: 1 量子ビットの初期化の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$ . Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎの場合. パラメータは  $g\tau_0 = \pi/4$ ,  $g\Delta\tau = g\tau_0/10 \approx 0.08$ ,  $\rho_1 = (|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|)/2$ .

となる. その他の成分は揺らぎの分布によらず 0 である. 一方, Lorentz 型の揺らぎの場合には,

$$\begin{aligned} \langle |\lambda_\uparrow|^2 \rangle &= 1, \\ \langle \lambda_\uparrow \lambda_\downarrow^* \rangle &= \langle \lambda_\downarrow \lambda_\uparrow^* \rangle^* = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2|g|\Delta\tau} e^{-i4g\tau_0} \right), \\ \langle |\lambda_\downarrow|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2|g|\Delta\tau} \cos 4g\tau_0 \right) \end{aligned} \quad (52)$$

となる.

そして,  $N$  回観測を行ったときの成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  は,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) &= \text{Tr}_1[(\hat{v}_\uparrow^{(\tau)})^N \rho_1] \\ &= {}_1\langle \uparrow | \rho_1 | \uparrow \rangle_1 + \langle |\lambda_\downarrow|^2 \rangle_1^N {}_1\langle \downarrow | \rho_1 | \downarrow \rangle_1 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) &\equiv {}_1\langle \uparrow | \tilde{\rho}_A^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) | \uparrow \rangle_1 \\ &= \frac{{}_1\langle \uparrow | \rho_1 | \uparrow \rangle_1}{{}_1\langle \uparrow | \rho_1 | \uparrow \rangle_1 + \langle |\lambda_\downarrow|^2 \rangle_1^N {}_1\langle \downarrow | \rho_1 | \downarrow \rangle_1} \end{aligned} \quad (54)$$

となる. 式 (51)～式 (54) より, 成功確率とフィデリティが受ける影響は, 揺らぎ幅  $g\Delta\tau \ll 1$  のときには, Gauss 型では  $(\Delta\tau)^2$ , Lorentz 型では  $\Delta\tau$  に比例することが分かる. したがって,  $g\Delta\tau$  が小さいときには, Gauss 型の方が Lorentz 型の場合よりも揺らぎの影響が現れにくく, より安定性が高いといえる.

図 6 は, Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎの場合に, 成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  を観測回数  $N$  の関数として描いたものである. 比較のため, 揺らぎがない場合の成功確率とフィデリティも描いてある. ただし, パラメータは  $g\tau_0 = \pi/4$ ,  $g\Delta\tau = g\tau_0/10 \approx 0.08$ ,  $\rho_1 = (|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|)/2$  とした.  $g\tau_0$  は揺らぎがないとき ( $\Delta\tau = 0$ ) に最適となるパラメータを選んでいる. 図 6 を見ると, どちらの場合も揺らぎの影響はあまり小さくなく, 10% 程度の揺らぎであれば純化の達成に大きな問題はないことが分かる. また, Gauss 型と Lorentz 型では, Lorentz 型の方が多少大きく影響が現れていることも確認できる.

さらに, 時間間隔  $\tau$  の揺らぎが純化の効率に及ぼす影響の別の見方として, フィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  の値が  $F$  になるために必要な観測回数  $N$  と, そのときにかかる平均の時間  $T_0$  を

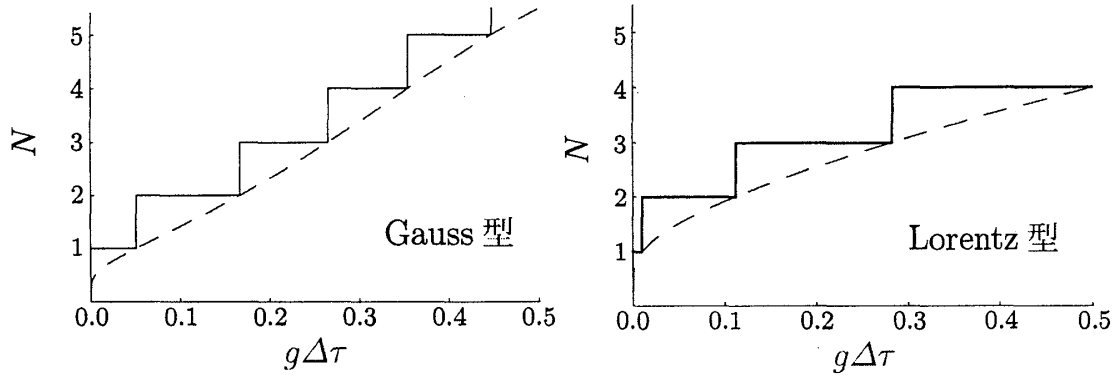


図 7: 1 量子ビットの初期化に必要な観測回数  $N$ . Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎの場合. パラメータは  $F = 0.99$ ,  ${}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1 = 0.5$ ,  $g\tau_0 = \pi/4$ . 実線はフィデリティが  $F$  より大きくなる最小の観測回数 (整数) であり, 破線は式 (55), (56) の解.

調べた. それらは, 式 (54) において  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) = F$  とおき, これを  $N$  に関して解くことで

$$N = \frac{1}{\log[\langle|\lambda_{\downarrow}|^2\rangle]} \log \left[ \frac{1-F}{F} \frac{{}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1}{{}_1\langle\downarrow|\rho_1|\downarrow\rangle_1} \right], \quad (55)$$

$$T_0 = N\tau_0 \quad (56)$$

と得られる. これらの量が小さいほど純化の効率が良いといえる.

図 7 は, 純化に必要な観測回数  $N$  を揺らぎ幅  $\Delta\tau$  の関数としてプロットしたものである. ただし, パラメータは  $F = 0.99$ ,  ${}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1 = 0.5$ ,  $g\tau_0 = \pi/4$  とした. また, 純化にかかる平均の時間  $T_0$  は単に  $N$  の定数倍 ( $\tau_0$  倍) なので省略する. 図 7 において,  $g\Delta\tau = 0$  が揺らぎのない理想的な場合であり, 揺らぎ幅  $\Delta\tau$  の増加に対して, 必要な観測回数  $N$  は単調に増加することが分かる. つまり, 揺らぎが大きくなるとともに純化の効率は悪くなってしまふ. この結果は,  $\tau_0$  を揺らぎがないときに最適になるように選んだためであり, 異なる  $\tau_0$  の場合には, 必ずしもこのようになるとは限らない. 実際, 揺らぎがないときに  $|\lambda_{\downarrow}|^2 > 1/2$  となる  $\tau_0$  を選ぶと, 式 (51), (52) により  $\langle|\lambda_{\downarrow}|^2\rangle < |\lambda_{\downarrow}|^2$  であるため, 揺らぎの影響によって純化の効率が良くなる. ただし, 最適な  $\tau_0$  を選んだときよりも効率が良くなることはない.

#### 4.1.2 Poisson 過程の場合

次に, Poisson 過程の場合を考える. この場合, 揺らぎの分布  $f(\tau)$  は  $\tau_0$  のみによって特徴付けられるため, これ以後, Poisson 過程について議論するときには, 成功確率とフィデリティはそれぞれ  $\tilde{P}^{(\tau_0)}(N)$ ,  $\tilde{F}^{(\tau_0)}(N)$  と書くことにする.  $\langle\psi_{\uparrow}^{(\tau)}\rangle$  の各成分は,

$$\begin{aligned} \langle|\lambda_{\uparrow}|^2\rangle &= 1, \\ \langle\lambda_{\uparrow}\lambda_{\downarrow}^*\rangle &= \langle\lambda_{\downarrow}\lambda_{\uparrow}^*\rangle^* = \frac{1 + 8(g\tau_0)^2 - 2ig\tau_0}{1 + 16(g\tau_0)^2}, \\ \langle|\lambda_{\downarrow}|^2\rangle &= \frac{1 + 8(g\tau_0)^2}{1 + 16(g\tau_0)^2} \end{aligned} \quad (57)$$

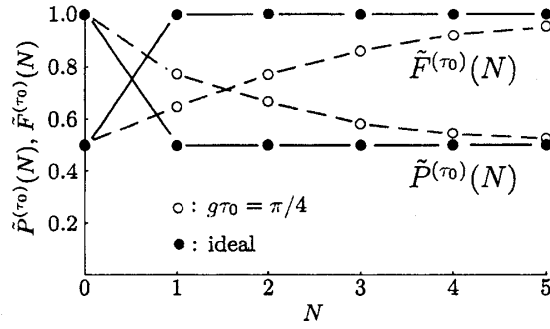


図 8: 1 量子ビットの初期化の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0)}(N)$ . Poisson 過程の場合. パラメータは  $g\tau_0 = \pi/4$ ,  $\rho_1 = (|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|)/2$ .

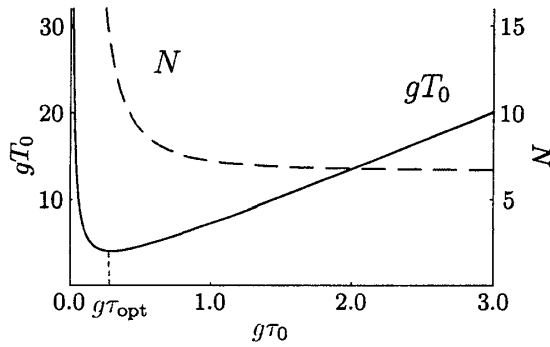


図 9: 1 量子ビットの初期化に必要な観測回数  $N$  と平均時間  $T_0$ . Poisson 過程の場合. パラメータは  $F = 0.99$ ,  ${}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1 = 0.5$ .

となる.

図 8 は, Poisson 過程の場合の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0)}(N)$  を観測回数  $N$  の関数として描いたものである. 比較のため揺らぎがないときの成功確率とフィデリティも併せて載せてある. パラメータは図 6 と同じく  $g\tau_0 = \pi/4$ ,  $\rho_1 = (|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|)/2$  とした. Gauss 型や Lorentz 型の場合と比べると, ランダムに観測を行う場合にはフィデリティの高い状態を得るために必要な観測回数  $N$  が, より多くなってしまうことが分かる.

一方, 純化に必要な観測回数  $N$  と平均時間  $T_0$  を平均時間間隔  $\tau_0$  の関数としてプロットしたものが図 9 である. パラメータは図 7 と同じく  $F = 0.99$ ,  ${}_1\langle\uparrow|\rho_1|\uparrow\rangle_1 = 0.5$  とした. 図 9 を見ると, 純化に必要な観測回数  $N$  は平均時間間隔  $\tau_0$  の小さいところで発散しており,  $\tau_0$  が大きくなるにつれて単調に減少して, ある値に漸近することが分かる. また, 純化に必要な平均時間  $T_0$  は,  $\tau_0$  が小さいところでは  $N$  が大きいために発散し,  $\tau_0$  が大きいところでは  $N$  が一定値に漸近するため,  $\tau_0$  に比例して増大する. したがって, 中間の領域において  $T_0$  が最小になるような平均時間間隔  $\tau_{\text{opt}}$  が存在する.

純化に必要な観測回数  $N$  と平均時間  $T_0$  がこのように振舞う理由は, Poisson 過程の場合に  $\tau$  の従う分布が, 指数分布 (46) であることから説明することができる. つまり, 指数分布 (46) は,  $\tau = 0$  の付近で最も大きい寄与を与えるが, このような短い時間間隔で観測を行うと, 量子 Zeno 効果 [6, 7] によって状態の遷移が抑制されてしまう. したがって, 欲しい純粋状態へ遷移させるためには観測回数



$N$  を多くしなければならないのである。一方、平均時間間隔  $\tau_0$  を大きくした場合には、指数分布は一般的な分布に近づいていくため、アンサンブル平均はある一定値に漸近することになる。ただし、減少の仕方が単調であることは、指数分布 (46) の性質から一般的に示すことはできない。

## 4.2 エンタングル状態の抽出

次に、エンタングル状態抽出の場合を考える。観測の影響が入った系 AB の時間発展演算子  $V_\phi(\tau)$  は、式 (27) で与えられている。 $|\Psi^-\rangle_{AB}$  は、時間間隔  $\tau$  にはよらず常に  $V_\phi(\tau)$  の固有状態である。特に、 $\omega = 0$  の場合には、 $|\Psi^-\rangle_{AB}$  の属する固有値  $\lambda_{\Psi^-}$  は  $\tau$  にはよらず  $|\lambda_{\Psi^-}| = 1$  を満たしている。したがって、前小節の初期化の場合と同様に揺らぎとは無関係に有限の成功確率で純化が可能であることが分かる。一方、 $\omega \neq 0$  の場合には、 $\lambda_{\Psi^-}$  が  $\tau$  に依存するため、異なる傾向が現れると考えられる。

### 4.2.1 $\omega = 0$ の場合 (Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎ)

まず、 $\omega = 0$  の場合を考える。以下では簡単のため  $|\phi\rangle_X = |\rightarrow\rangle_X \equiv (|\uparrow\rangle_X + |\downarrow\rangle_X)/\sqrt{2}$  とする。すると、 $|\Psi^-\rangle_{AB}$  の他に  $|\Phi^-\rangle_{AB}$  も、 $\tau$  によらず  $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルとなる。しかし、残りの固有ベクトルは時間間隔  $\tau$  に依存するため、前小節のように  $V_\phi(\tau)$  の固有ベクトルを用いて  $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  を対角化することはできない。そこで本論文では、 $\tau$  によらない適当な基底によって  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  を展開して各要素  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}{}_{mn,kl}$  を具体的に書き下し、 $\tau$  の揺らぎに関するアンサンブル平均  $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle_{mn,kl}$  を求める。ここまでは解析的に計算する。そして、得られた  $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  から、成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  及びフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  を数值的に計算する。

本論文では、基底として

$$\begin{cases} |u_{\Psi^-}\rangle_{AB} &= |\Psi^-\rangle_{AB} \\ |u_{\Phi^-}\rangle_{AB} &= |\Phi^-\rangle_{AB} \\ |u_{\pm}\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle_{AB} \pm i|\Phi^+\rangle_{AB}) \end{cases} \quad (58)$$

を採用した。 $|u_+\rangle_{AB}$  ( $|u_-\rangle_{AB}$ ) は、揺らぎがない場合に最適となる平均時間間隔  $\tau_0$  を選んだとき [具体的には  $g\tau_0/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3)$ ] の、 $V_\phi(\tau)$  の右 (左) 固有ベクトルである。完全正規直交系は

$$\sum_i |u_i\rangle_{AB} \langle u_i| = \mathbb{1}_{AB}, \quad {}_{AB} \langle u_i | u_j \rangle_{AB} = \delta_{ij}, \quad (i, j = \Psi^-, \Phi^-, +, -) \quad (59)$$

となる。 $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  の詳細については煩雑になるため、付録 A に記す。

Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎが入った場合の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$ 、フィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  を観測回数  $N$  の関数として、図 10 に示す。比較のため、揺らぎがない場合も併せて描いてある。ただし、パラメータは、 $g\tau_0/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3) \approx 1.23$ ,  $g\Delta\tau = 0.1$ ,  $|\phi\rangle_X = |\rightarrow\rangle_X \equiv (|\uparrow\rangle_X + |\downarrow\rangle_X)/\sqrt{2}$ ,  $\rho_{AB} = (|\Psi^-\rangle_{AB} \langle \Psi^-| + |\Psi^+\rangle_{AB} \langle \Psi^+|)/2$  とした。 $g\tau_0$  は揺らぎがないときに最適になるように選んでいる。図 10 を見ると、揺らぎ幅  $\Delta\tau$  は平均時間間隔  $\tau_0$  の 10% 程度とかなり大きいにもかかわらず、理想的な場合からのずれはほとんど見られない。よって、エンタングル状態抽出の場合には、 $\omega = 0$  であればこの純化の方法は Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎに対して安定であるといえる。この傾向は 1

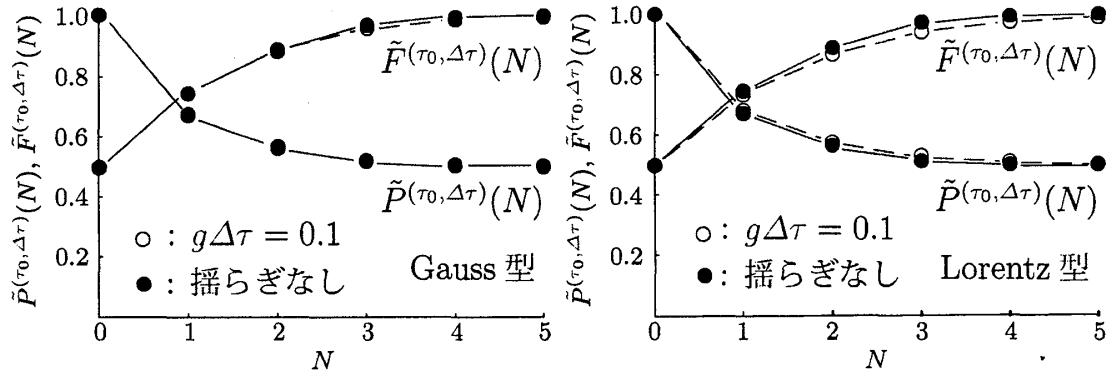


図 10: エンタングル状態の抽出の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$ . Gauss 型と Lorentz 型の揺らぎの場合. パラメータは  $g\tau_0/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3) \approx 1.23$ ,  $g\Delta\tau = 0.1$ ,  $|\phi\rangle_{\mathbf{x}} = |\rightarrow\rangle_{\mathbf{x}} \equiv (|\uparrow\rangle_{\mathbf{x}} + |\downarrow\rangle_{\mathbf{x}})/\sqrt{2}$ ,  $\rho_{AB} = (|\Psi^-\rangle_{AB}\langle\Psi^-| + |\Psi^+\rangle_{AB}\langle\Psi^+|)/2$ .

量子ビットの初期化の場合と同様であるが、エンタングル状態の抽出の場合には解析的な計算を行っていないため、これが一般的な系で成り立つ結果であるかは今のところわからない。そこで、揺らぎ幅  $\Delta\tau$  が小さい場合の摂動計算などを行って、 $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  の固有値を解析的に求めることにより、安定性の原因を調べることが今後の課題の一つである。

また、Gauss 型よりも Lorentz 型の場合の方が揺らぎの影響が比較的大きく現れていることも分かる。これは、 $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  の行列要素への揺らぎの影響が、 $g\Delta\tau$  の小さいところで Gauss 型では  $(\Delta\tau)^2$ 、Lorentz 型では  $\Delta\tau$  に比例することから素朴に期待される結果と一致しており、この結果も 1 量子ビットの初期化の場合と同様である。

#### 4.2.2 $\omega = 0$ の場合 (Poisson 過程)

Poisson 過程の場合の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0)}(N)$  を観測回数  $N$  の関数として、図 11 に示す。パラメータは図 10 と同じく  $g\tau_0/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3) \approx 1.23$ ,  $|\phi\rangle_{\mathbf{x}} = |\rightarrow\rangle_{\mathbf{x}} \equiv (|\uparrow\rangle_{\mathbf{x}} + |\downarrow\rangle_{\mathbf{x}})/\sqrt{2}$ ,  $\rho_{AB} = (|\Psi^-\rangle_{AB}\langle\Psi^-| + |\Psi^+\rangle_{AB}\langle\Psi^+|)/2$  とした。Poisson 過程の場合には、Gauss 型や Lorentz 型の場合に比べると、純化を達成するために必要な観測回数が増えてしまうことが分かる。これも 1 量子ビットの初期化の場合と同様である。

また、純化に必要な観測回数  $N$  と平均時間  $T_0$  を、平均時間間隔  $\tau_0$  の関数として図 12 に示す。パラメータは  $F = 0.99$ ,  $|\phi\rangle_{\mathbf{x}} = |\rightarrow\rangle_{\mathbf{x}} \equiv (|\uparrow\rangle_{\mathbf{x}} + |\downarrow\rangle_{\mathbf{x}})/\sqrt{2}$ ,  ${}_{AB}\langle\Psi^-|\rho_{AB}|\Psi^-\rangle_{AB} = 0.5$  とした。図 12 から、純化に必要な観測回数  $N$ 、平均時間  $T_0$  ともに、定性的には 1 量子ビットの初期化の場合 (図 9) と同じ傾向であり、純化に必要な平均時間  $T_0$  が最小になるような平均時間間隔  $\tau_{\text{opt}}$  が存在することが分かる。

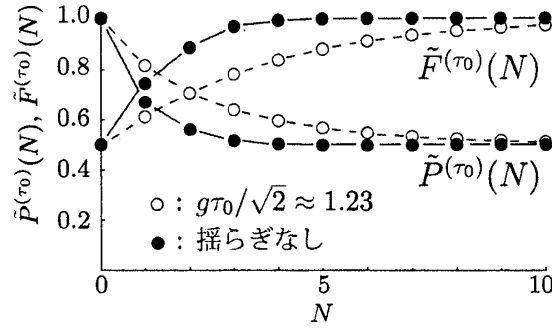


図 11: エンタングル状態の抽出の成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0)}(N)$  とフィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0)}(N)$ . Poisson 過程の場合. パラメータは  $g\tau_0/\sqrt{2} = \cos^{-1}(1/3) \approx 1.23$ ,  $|\phi\rangle_X = |\rightarrow\rangle_X \equiv (|\uparrow\rangle_X + |\downarrow\rangle_X)/\sqrt{2}$ ,  $\rho_{AB} = (|\Psi^-\rangle_{AB}\langle\Psi^-| + |\Psi^+\rangle_{AB}\langle\Psi^+|)/2$ .

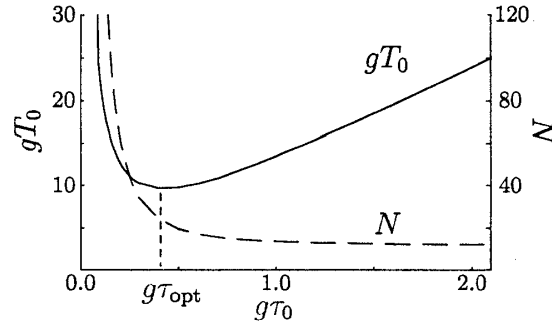


図 12: エンタングル状態の抽出に必要な観測回数  $N$  と平均時間  $T_0$ . Poisson 過程の場合. パラメータは  $F = 0.99$ ,  $|\phi\rangle_X = |\rightarrow\rangle_X \equiv (|\uparrow\rangle_X + |\downarrow\rangle_X)/\sqrt{2}$ ,  ${}_{AB}\langle\Psi^-|\rho_{AB}|\Psi^-\rangle_{AB} = 0.5$ .

#### 4.2.3 $\omega \neq 0$ の場合

次に,  $\omega \neq 0$  の場合について考察する. この場合には, 最大固有値  $\lambda_{\Psi^-}$  が観測時間間隔  $\tau$  に依存し, その絶対値は  $\tau$  の揺らぎの影響を受けて, 1 より小さくなることが予想される. したがって, 成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  が, 観測回数  $N$  が増えるにしたがって減衰してしまうと考えられる. そこで, この減衰の様子を調べる. そのためには, Zeno 型観測による量子状態純化の一般論において, 成功確率を支配する量が最大固有値  $|\lambda_0|$  であったことを思い出せばよい. 今の場合,  $\lambda_0$  は  $\lambda_{\Psi^-}$  であり, 対応する超演算子  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  の要素は  $|\lambda_{\Psi^-}|^2$  となる. したがって, 揺らぎのある時間間隔  $\tau$  で  $N$  回観測を行ったときの成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  は,

$$\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N) \xrightarrow{N \rightarrow \text{large}} \langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle^N {}_{AB}\langle\Psi^-|\rho_{AB}|\Psi^-\rangle_{AB} \quad (60)$$

となることが分かる。実際にそれぞれの揺らぎの分布に対して  $\langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle$  を計算すると, Gauss 型では,

$$\begin{aligned}\langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-(\omega\Delta\tau)^2/2} \cos \omega\tau_0 \right) \\ &\approx 1 - \frac{1}{4} (\omega\Delta\tau)^2 \quad (\omega\Delta\tau \ll 1, \omega\tau_0 = 2n\pi) \\ &< 1 \quad (\Delta\tau \neq 0),\end{aligned}\tag{61}$$

Lorentz 型では,

$$\begin{aligned}\langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\omega\Delta\tau/2} \cos \omega\tau_0 \right) \\ &\approx 1 - \frac{1}{4} \omega\Delta\tau \quad (\omega\Delta\tau \ll 1, \omega\tau_0 = 2n\pi) \\ &< 1 \quad (\Delta\tau \neq 0),\end{aligned}\tag{62}$$

Poisson 過程の場合は,

$$\langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle = \frac{1 + (\omega\tau_0)^2/2}{1 + (\omega\tau_0)^2} < 1 \quad (\omega\tau_0 \neq 0),\tag{63}$$

となる。いずれ場合にも  $\langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle < 1$  となるため, 観測回数  $N$  の増加とともに, 成功確率が指数的に減衰してしまうことが確認できた。その減衰率  $\Gamma_N$  は, 式 (60) において (右辺) =  $e^{-\Gamma_N N} {}_{AB}\langle \Psi^- | \rho_{AB} | \Psi^- \rangle_{AB}$  とおき,  $\Gamma_N$  について解くことで得られ,

$$\Gamma_N = -\ln \langle |\lambda_{\Psi^-}|^2 \rangle\tag{64}$$

となる。具体的にそれぞれの揺らぎに対してこれ計算すると, Gauss 型では,

$$\Gamma_N \approx (\omega\Delta\tau)^2/4 \quad (\omega\Delta\tau \ll 1, \omega\tau_0 = 2n\pi),\tag{65}$$

Lorentz 型では,

$$\Gamma_N \approx \omega\Delta\tau/4 \quad (\omega\Delta\tau \ll 1, \omega\tau_0 = 2n\pi),\tag{66}$$

Poisson 過程の場合は,

$$\Gamma_N \approx \omega\tau_0/2 \quad (\omega\tau_0 \ll 1)\tag{67}$$

となる。

しかし現実的には, 成功確率が減衰するよりも速くフィデリティが 1 に近づけば, 純化は十分に達成できるといえる。したがって, フィデリティ  $\tilde{F}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  を評価し, 成功確率  $\tilde{P}^{(\tau_0, \Delta\tau)}(N)$  と比較することは重要であり, 今後の研究課題の一つである。

## 5 まとめと今後の展望

本論文では, Zeno 型観測による量子状態純化の, 理想的な状況からパラメータが揺らいでしまった場合の安定性を議論する一環として, 観測時間間隔  $\tau$  の揺らぎを採り上げ, その影響を議論した。特

に、量子ビット系で初期化とエンタングル状態抽出の例について、純化可能性を調べた。また、具体的な揺らぎの分布として、Gauss 型揺らぎ、Lorentz 型揺らぎ、Poisson 過程を考え、それぞれの揺らぎによって成功確率とフィデリティが受ける影響を調べた。

その結果、量子ビットの初期化及び、エンタングル状態の抽出 ( $\omega = 0$ ) の場合には、揺らぎの種類に関わらず有限の成功確率で純化が可能である一方で、 $\omega \neq 0$  の場合には、成功確率が観測回数  $N$  の増加とともに指数関数的に減衰してしまうことが分かった。

また、Gauss 型揺らぎと Lorentz 型揺らぎの場合には、揺らぎ幅が小さければ、 $\tau$  の揺らぎが成功確率やフィデリティに及ぼす影響はあまり小さくなく、これらの揺らぎに対してこの純化の方法が比較的安定であることが分かった。さらに、両者を比較すると Gauss 型の方がより安定であることが分かった。一方で、Poisson 過程の場合には、純化を達成するために必要な観測回数  $N$  が、Gauss 型や Lorentz 型の揺らぎの場合と比べて多くなってしまうことが分かった。そして、Poisson 過程の場合には、純化を達成するために掛かる平均時間  $T_0$  を最小にするような平均時間間隔  $\tau_{\text{opt}}$  が存在することもわかった。

今後は、まずエンタングル状態の抽出において、 $\omega = 0$  の場合の解析的な計算を行うとともに、 $\omega \neq 0$  の場合の定量的な評価を行って、成功確率の減衰とフィデリティの増加の速さを比較し、純化が可能であるかどうかを調べる。さらに、観測を行う状態の揺らぎなどの他のパラメータの揺らぎに対する安定性を調べ、また、より現実的なモデルの構築や、そのとき考えられる誤差の影響も調べていく。

## 謝辞

本研究を指導して下さった大場一郎教授、中里弘道教授に心から感謝致します。また、湯浅一哉助手には様々な助言を頂き、議論にも付き合ってくださいました。ありがとうございました。また、本研究に関して様々な形でサポートしてくださった大場・中里研究室の皆様に感謝いたします。

## 付録A $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$ の計算

4.2.1 小節で述べたエンタングル状態の抽出 ( $\omega = 0$ ) の場合の超演算子  $\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle$  の具体形を記す。簡単のため、 $|\phi\rangle_X = |\rightarrow\rangle_X \equiv (|\uparrow\rangle_X + |\downarrow\rangle_X)/\sqrt{2}$  の場合を考える。このとき  $V_\phi(\tau)$  は

$$\begin{aligned} V_\phi(\tau) &\equiv {}_X\langle \rightarrow | e^{-iH\tau} | \rightarrow \rangle_X \\ &= |\Psi^-\rangle_{AB} \langle \Psi^-| + \cos^2 \frac{1}{\sqrt{2}} g\tau (|\Phi^-\rangle_{AB} \langle \Phi^-| + |\Phi^+\rangle_{AB} \langle \Phi^+|) \\ &\quad + \cos \sqrt{2} g\tau |\Psi^+\rangle_{AB} \langle \Psi^+| - \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} g\tau (|\Phi^+\rangle_{AB} \langle \Psi^+| + |\Psi^+\rangle_{AB} \langle \Phi^+|) \end{aligned} \quad (68)$$

となる. これを完全正規直交基底 (58), (59) によって展開すると, 展開係数  $(V_\phi(\tau))_{mn} \equiv {}_{AB}\langle u_m | V_\phi(\tau) | u_n \rangle_{AB}$  は,

$$\begin{aligned} (V_\phi(\tau))_{\Psi-\Psi-} &= 1 \\ (V_\phi(\tau))_{\Phi-\Phi-} &= \frac{1}{2}(1 + \cos \sqrt{2}g\tau) \\ (V_\phi(\tau))_{++} &= (V_\phi(\tau))_{--} = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos \sqrt{2}g\tau) \\ (V_\phi(\tau))_{\pm\mp} &= -\frac{1}{4}(1 - \cos \sqrt{2}g\tau \pm 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2}g\tau), \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となる. その他の成分は 0 である.  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}$  の各成分は,  $\hat{v}_\phi^{(\tau)}{}_{mn,ij} = (V_\phi(\tau))_{mi}(V_\phi(\tau))_{nj}^*$  で与えられる. さらに, 基底 (58) が時間間隔  $\tau$  に依存しないことから, アンサンブル平均は

$$\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle_{mn,ij} = \langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle_{mn,ij} = \langle (V_\phi(\tau))_{mi}(V_\phi(\tau))_{nj}^* \rangle \quad (69)$$

となる. 行列表示すると,

$$\langle \hat{v}_\phi^{(\tau)} \rangle = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

となる. ここで,

$$\begin{cases} M_1 = \begin{pmatrix} M_\alpha & 0 \\ 0 & M_\beta \end{pmatrix}, & M_2 = C^{(1)}M_1, \\ M_3 = \begin{pmatrix} M_\beta & 0 \\ 0 & C^{(1)}M_\beta \end{pmatrix}, & M_4 = \begin{pmatrix} C^{(2)}M_\beta & C_+^{(3)}M_\beta \\ C_-^{(3)}M_\beta & C^{(2)}M_\beta \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (71)$$

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^{(1)} \end{pmatrix}, \quad M_\beta = \begin{pmatrix} C^{(2)} & C_+^{(3)} \\ C_-^{(3)} & C^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

$$\begin{cases} C^{(1)} = \langle \frac{1}{2}(1 + \cos \sqrt{2}g\tau) \rangle, \\ C^{(2)} = \langle \frac{1}{4}(3 + \cos \sqrt{2}g\tau) \rangle, \\ C_\pm^{(3)} = \langle -\frac{1}{4}(1 - \cos \sqrt{2}g\tau \pm 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2}g\tau) \rangle, \end{cases} \quad (73)$$

である. また, 基底は式 (49) と同様に密度行列をベクトル形式で表すため,  $M_1$  については

$$\begin{aligned} |u_{\Psi-}\rangle_{AB}\langle u_{\Psi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{\Psi-}\rangle_{AB}\langle u_{\Phi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |u_{\Psi-}\rangle_{AB}\langle u_+| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{\Psi-}\rangle_{AB}\langle u_-| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (74)$$

$M_2$  については

$$\begin{aligned} |u_{\Phi-}\rangle_{AB}\langle u_{\Psi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{\Phi-}\rangle_{AB}\langle u_{\Phi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |u_{\Phi-}\rangle_{AB}\langle u_{+}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{\Psi-}\rangle_{AB}\langle u_{-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (75)$$

$M_3$  については

$$\begin{aligned} |u_{+}\rangle_{AB}\langle u_{\Psi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{-}\rangle_{AB}\langle u_{\Psi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |u_{+}\rangle_{AB}\langle u_{\Phi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{-}\rangle_{AB}\langle u_{\Phi-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (76)$$

$M_4$  については

$$\begin{aligned} |u_{+}\rangle_{AB}\langle u_{+}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{+}\rangle_{AB}\langle u_{-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |u_{-}\rangle_{AB}\langle u_{+}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |u_{-}\rangle_{AB}\langle u_{-}| &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

とした。

## 参考文献

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [2] *The Physics of Quantum Information*, edited by D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger (Springer-Verlag, Heidelberg, 2000).
- [3] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wothers, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996).
- [4] H. Nakazato, T. Takazawa, and Y. Yuasa, Phys. Rev. Lett. **90**, 060401 (2003); J. Phys. Soc. Jpn. **72** Suppl. C, 34 (2003).
- [5] H. Nakazato, M. Unoki, and K. Yuasa, quant-ph/0402182 (2004); J. Mod. Opt. (in press).
- [6] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).
- [7] H. Nakazato, M. Namiki, and S. Pascazio, Int. J. Mod. Phys. **B10**, 247 (1996).